# 极强磁场与QCD相图

曹高清

（中山大学 物理与天文学院 珠海 519088）

**摘要** 本文总结了极强磁场下量子色动力学（Quantum Chromodynamics，QCD）相变的研究现状和许多新进展，包括格点QCD和有效手征模型的计算结果。涉及的QCD相如下：手征对称性破缺、手征对称性恢复、非均匀手征相、$\pi^0$凝聚、π超流、ρ凝聚以及色超导。除了强磁场$B$外，这些相的实现和相互转化还要同时考虑其他效应的共同作用，比如温度$T$、强电场$E$、各种化学势$\mu$或转动角速度$\Omega$等。与之对应，介绍一些由磁场和这些物理参量共同张成的相图：$T$ - $B$相图、$E$ - $B$相图、$\mu_B$ - $B$相图、$\mu_I$ - $B$相图以及$\Omega$ - $B$相图，并阐述相变背后的物理机制。

**关键词** 极强磁场，QCD相变，相图，反磁催化，π凝聚，ρ超导

**中图分类号** TL99

**DOI:** 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040003

## Extremely strong magnetic field and QCD phase diagram

CAO Gaoqing

(*School of Physics and Astronomy, Sun Yat-sen University, Zhuhai 519088, China*)

**Abstract** Several experiments are being conducted at heavy-ion colliders around the world to determine the location of the proposed critical end point of quantum chromodynamics (QCD) in the $T$ - $\mu_B$ phase diagram. As the presence of a very strong magnetic field is relevant to peripheral heavy-ion collisions, magnetars, and the early Universe, it is important to investigate the effect of a high magnetic field strength on QCD phase diagrams. We summarize the recent status and new developments in studies investigating QCD phase transitions under an extremely strong magnetic field. By doing so, we believe that this work will promote both theoretical and experimental research in this field. The $T$ - $B$ phase diagrams are produced by Lattice QCD simulations. Other phase diagrams ($E$ - $B$, $\mu_B$ - $B$, $\mu_I$ - $B$, and $\Omega$ - $B$) are mainly studied by using the chiral effective Nambu Jona-Lasinio model. A rotating magnetic field is adopted for the study of color superconductivity. The Ginzburg-Landau approximation is used to study π-superfluidity and ρ-superconductivity in a very strong magnetic field. Physical effects, besides a magnetic field $B$, can also be measured when sketching a QCD phase diagram, such as temperature $T$, strong electric field $E$, chemical potentials $\mu$, and rotational angular velocity $\Omega$. We present five QCD phase diagrams: $T$ - $B$, $E$ - $B$, $\mu_B$ - $B$, $\mu_I$ - $B$, and $\Omega$ - $B$. The following phases are present in many (if not all) of the five QCD phase diagrams: chiral symmetry breaking, chiral symmetry restoration, inhomogeneous chiral phase, $\pi^0$-condensation, π-superfluidity, ρ-superconductivity, and color superconductivity. The running of the coupling constant with magnetic field is consistent with the decrease of the pseudo-critical deconfinement temperature, providing a natural explanation for the inverse magnetic catalysis effect. We also found that a chiral anomaly induces pseudoscalar condensation in a parallel electromagnetic field, and that there appears to be a chiral-symmetry restoration phase in the $E$ - $B$ phase diagram. Without consideration of confinement, color superconductivity is typically favored for large baryon chemical

国家自然科学基金(No.11805290)资助

第一作者：曹高清，男，1986年出生，2015年于清华大学获博士学位，研究领域为高能核物理，E-mail：caogaoqing@mail.sysu.edu.cn

收稿日期：2022-12-05，修回日期：2022-12-19

Supported by National Natural Science Foundation of China (No.11805290)

First author: CAO Gaoqing, male, born in 1986, graduated from Tsinghua University with a doctoral degree in 2015, focusing on high energy nuclear physics, E-mail: caogaoqing@mail.sysu.edu.cn

Received date: 2022-12-05, revised date: 2022-12-19

potential; however, chiral density wave is also possible in the large $B$ and relatively small $\mu_B$ region of the phase diagram. In an external magnetic field, the π-superfluid with finite isospin chemical potential acts similarly to a Type-II superconductor with finite electric chemical potential. Both π-superfluidity and ρ-superconductivity are possible in a parallel magnetic field and rotation, but the latter is more favored for larger $\Omega$ particles.

**Key words** Very strong magnetic field, QCD phase transition, Phase diagram, Inverse magnetic catalysis, π condensation, ρ superconductivity



20世纪以前，人们所知道的各种力归根结底来源于两种基本相互作用：引力相互作用和电磁相互作用。地球表面的重力、星体或黑洞之间的吸引都是引力相互作用，而日常生活中广泛接触的弹力、摩擦力、压力、拉力、浮力、曳力和表面张力等都是原子间电磁相互作用的不同表现形式。1909~1911年，英国物理学家卢瑟福所做的α粒子轰击金箔实验有力地证明了带正电的原子核的存在，从此核力的概念开始进入物理学——它是原子核紧密束缚成一团的原因。核物理和粒子物理的发展为人们揭示出：原子核由电中性的中子和带单位正电荷的质子组成，而中子和质子（合称核子）又由带色荷的夸克和胶子所组成。夸克和胶子间的作用称为强相互作用、通过量子色动力学（Quantum Chromodynamics，QCD）描述，而作为核子间相互作用的核力主要是强相互作用的剩余相互作用。这里所谓的剩余相互作用是指：虽然每个独立的核子都是色中性的，但由于它们有内部结构，当他们相互靠近时每个核子内部的粒子会重新排布，从而使得核子局域色荷不为零并产生有限的有效相互作用。与此类似，前面提到的日常生活中的各种力其实就是电中性的原子间的剩余电磁相互作用的不同呈现。此外，人们把原子核β衰变的根源归于弱荷（所有的基本费米子都带弱荷）之间的弱相互作用，这就凑齐了大家所熟知的4种基本相互作用。近些年，随着上帝粒子（希格斯粒子）的发现，也有学者把它参与的相互作用称作第5种基本相互作用。

前述中，看到核物理涉及强、弱相互作用；考虑到质子既有质量又带电荷，它们其实也参与引力和电磁相互作用。所以，核物理实际上涵盖了所有4种基本相互作用，具有非常丰富的物理内涵。以下以质子为例，比较一下两个质子距离为1 fm时4种相互作用对应经典力的强度[1]：引力约$10^{-34}$ N、弱力约$10^{-2}$ N、电磁力约$10^{2}$ N、强力约$10^{4}$ N。很明显，引力作用在微观尺度是非常弱的，基本上可以忽略，其他三种相互作用都有观测效应，比如原子核的β衰变（弱）、γ衰变（电磁）和α衰变（强）。这三种微观尺度的相互作用的基本理论都是规范场理论，其中电磁场是阿贝尔规范场，弱场是SU(2)非阿贝尔规范场，胶子场是SU(3)非阿贝尔规范场。真空中，弱场和胶子场的作用范围都不会超过原子核的尺度（≲ 10 fm），但机制不同，弱场是因为本身质量很重，不能传播较远，带色荷的胶子场由于禁闭效应不能从核子内往外传播较远。低能核物理通常以色中性的介子作为核子间相互作用的有效媒介子，如σ介子、π介子、ω介子和ρ介子等；但是这些介子都是有质量的，因而作用范围也在原子核尺度。由于原子的尺度为$10^{-10}$ m，因而强、弱相互作用在原子分子物理中是完全可以忽略的。于此，会发现电磁相互作用是唯一一个在宏观和微观物理中都扮演重要角色的基本相互作用，这主要基于两个原因：电磁场不带电荷且无质量，因而静电力满足距离的平方反比律；单位电荷的大小适中。

到目前为止，通过物理实验所确定的相图都是以原子或分子为基本自由度的，因而全部由电磁相互作用主导，比如水和氦的压强-温度相图[2−3]、超导的磁场-温度相图[4]和温度-掺杂相图[5]。相图的要素包括：可变化的物理参量、不同的相、相边界以及它的爱伦费斯特相变级次、临界点。以水的压强-温度相图为例，它的变化物理参量为压强和温度，图中有三个可区分的相：固态、液态和气态，相互间的相边界都是一级相变，而且存在一个三相点和一个气-液临界点。根据4种基本相互作用的强度，很容易想见：如果存在一个核子组成的庞大系统（一般称为核物质），则这个系统必然由强相互作用主导，因而是研究QCD相图的理想场所。实际上，由大质量恒星坍缩而成的中子星就是自然存在的核物质，它的基本自由度是核子，密度是铁的$10^{14}$倍；但是，因为中子星的不可控性以及观测的不精确性，很难通过研究它们的性质确定核物质相变的发生以及相应的物理参数。目前，根据原子核的饱和性质知道对称核物质在低温时会有一级气-液相变[6]，至于相变线还没有实验能真正测定它的准确位置[7]，设想低能的电子-原子核碰撞可以在这方面提供有益的探索。另一方面，相对论重离子碰撞帮助实现了类似宇宙早期的一种状态，那里夸克、胶子可以在很大范围内较自由运动，因而这种相被称为夸克-胶子等离子体（Quark-gluon Plasma，QGP）[8]。随着重离子碰撞产

生的火球膨胀冷却，探测器能直接探测到的只有色单态的强子，显然这里参与强相互作用的物质（统称QCD物质）形态从QGP相变到了强子相；但遗憾的是这种相变发生在温度高、重子数密度低的区域，是一种连续过渡，即没有相变级次[9−11]。当前，世界上许多重离子对撞机都把碰撞能量降下来以达到温度较低、重子数密度较高的区域[12]；最新的实验结果显示，QCD物质的温度-重子数化学势（$T$ - $\mu_B$）相图中可能存在临界终止点[13]，它也预示着低温高密区域存在有级次的相变但不一定是一级相变。前面提到的对称核物质零温时的气-液相变点在$T$ - $\mu_B$相图中是知道的，期望QCD物质的第一张相图的绘制会以临界终止点的确定为新的起点，不断向低温高密区域推进[14]；所以，整个$T$ - $\mu_B$相图的确定仍任重而道远，特别是实验上如何想办法达到重子数密度很高的区域。

其实，与其他高能物理领域一样，QCD相图方面的研究一直是理论先行的；比如，如果没有有效手征模型的广泛研究[15−16]，将无法知道临界终止点存在的可能性，更不可能通过实验去寻找。根据相对论重离子碰撞可创造出的极端环境[17]（图1(a)，绿色箭头代表磁场的方向，非对心重离子碰撞中产生的磁场一般垂直于碰撞平面，磁星周围的磁场分布类似于长条形磁铁棒，早期宇宙原初磁场方向的分布比较随机），认为另一些QCD相图的研究也是非常重要的、对实验可能有重要指导意义，那就是极强磁场下QCD物质的相图。显然，外磁场如能影响QCD物质的相变，必须强到接近或超过QCD的能标$\Lambda_{QCD}$~0.1 GeV，这是所强调的“极强磁场”的含义。实际上，研究这类相图对天文学也有重要参考价值，比如有两类中子星：磁星[18]和脉冲星[19]具有非常强的磁场（图1(b)），后者的内部形态可能和自转突快现象息息相关；宇宙早期也可能存在很强的原初磁场[20]（图1(c)），它可能会改变QCD相变的级次进而影响引力波的产生。从理论上而言，研究极强磁场效应的优势在于：磁场不会带来“符号”问题，因而可以通过第一性原理的格点QCD的数值模拟得到可靠的结果。但是，当系统中同时存在化学势或者类似化学势的效应时，格点QCD的预言能力是很有限的，这时要参考更容易进行解析推导的手征有效模型的研究结果。含有磁场的相图前已有之，比如超导的磁场-温度相图[4]，它涉及的是背景磁场的作用和电子间的电磁作用，归根结底只有电磁这一种基本相互作用。与之不同，这里将要讨论的极强磁场下的QCD物质实际上是电磁和强相互作用共同起主导作用的系统，背景电磁场和粒子间强相互作用的强弱变化和相互影响是一个非常有意思的研究课题。

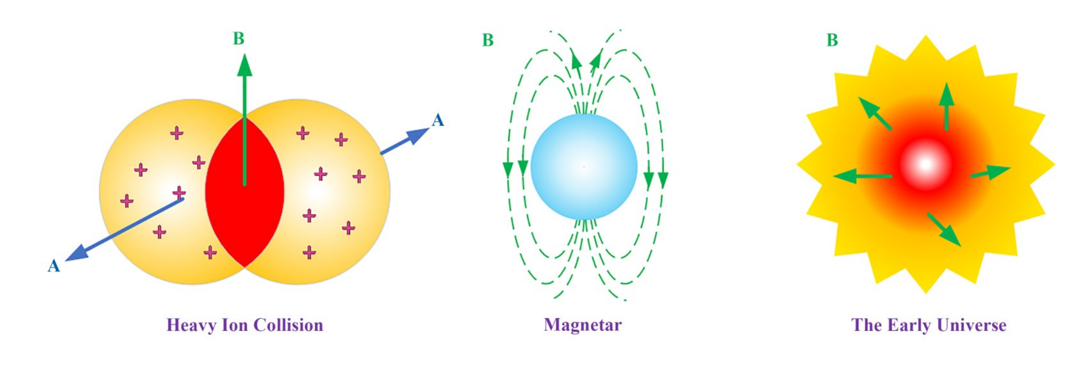



**图1**　三个与极强磁场有关的物理环境的卡通图
(a) 重离子碰撞，(b) 磁星，(c) 早期宇宙
**Fig.1**　Schematic diagrams of three physical circumstances that have very strong magnetic fields
(a) Heavy ion collisions, (b) Magnetars, (c) The early Universe

如前所述，为了绘制相图，必然要引入各种不同的物理参量，然后通过变化这些参量去讨论物质形态的改变。这里介绍的相图除了都以磁场作为其中一个维度外，还包括如下物理参量：温度$T$、各种化学势$\mu$、电场$E$或者转动角速度$\Omega$。为后面讨论做铺垫，先简单介绍一下这些参量的物理效应。根据经典统计力学中的能均分定理，知道温度表征的是系统平均动能的大小，包括粒子的平动和转动自由度[19]。由此，可以推断温度一般倾向于破坏费米子的配对或者玻色-爱因斯坦凝聚，因为周围有较大动能的粒子的碰撞相当于输入额外的能量激发它们。热力学中，化学势反映的是系统中由粒子携带的守恒荷增加1所引起内能的增加；反过来，系统的守恒荷密度可由热力学势对化学势的负偏微分给出[21]。化学势的种类很多，不同的守恒荷都可以定义相应的化学势，高能核物理中常见的化学势有：电化学势$\mu_Q$、重子数化学势$\mu_B$、同位旋化学势$\mu_I$、奇异数化学势$\mu_S$、电子轻子数化学势$\mu_e$和缪子轻子数化学势$\mu_\mu$

等。在相变过程中，化学平衡要求化学势是连续的而守恒荷密度不一定连续，所以相图中一般用化学势作坐标轴而不是荷密度。对费米子而言，由于费米面附近粒子的有效耦合强度明显增强，化学势总是倾向于使带同号守恒荷的费米子发生配对[4]；对玻色子而言，化学势增大意味着总粒子数增多，那么根据玻色统计会有一部分粒子同处于零能的玻色-爱因斯坦凝聚态[21]。有外电场的系统一般不是平衡态，因为带电粒子在电场中会被加速从而使得整个系统的总能量不守恒，显然电场会倾向于破坏带电玻色子的玻色-爱因斯坦凝聚。即使是中性玻色子系统，如果玻色子由两个相反电荷的粒子组成，则电场会拉开两组分粒子的距离，从而玻色子的稳定性以及玻色-爱因斯坦凝聚都会受到破坏。由此可见，电场对相变的影响与温度很相像。转动系统一定是有物质的，其中的每一个小区域可以看成是以一定质心速度运动的定域平衡系统：由于每个定域系统在转动参考系中都会受到一个向外的惯性离心力，转动系统需要外力或者内力的作用才能维持平衡。例如，天宫空间站绕地球转动是完全失重的，即地球的吸引力平衡了空间站的惯性离心力，所以可以把转速很快但体积很小的空间站当作定域平衡的系统——如果其他条件一样，天宫里观察到的系统行为（如水的相变）原则上和惯性系一样。从微观层次来看，转动带来的主要效应是使粒子的角动量沿转动角速度的方向发生极化[22]，包括轨道和自旋角动量。由此可以推断总轨道或自旋角动量为0的复合粒子随转动角速度增大会越来越不稳定，因而这类粒子的凝聚容易被转动效应破坏。然而，从朗道给出的转动系统粒子分布函数[20]可知转动角速度还具有类似于化学势的效应，这反过来又有利于某些作用道费米子的配对。

最后，详细介绍一下磁场效应。从经典力学来看，电场带来的静电力和转动引起的惯性离心力都有增大粒子有效运动范围的倾向，而磁场带来的洛伦兹力则会把带电粒子的运动范围限制得更小。后者意味着磁场具有束缚效应，由量子力学可知：带电粒子在磁场的有效势中运动会形成束缚态，而这束缚态的本征能量一定是分立的，即朗道能级[23]。朗道能级的分立性带来了许多重要的物理效应，比如量子霍尔效应、de Hass-van Alphen振荡[23]等。对带正电的粒子而言，磁场具有和转动类似的效应，即使粒子角动量沿磁场方向极化，带负电的粒子则反之。正由于磁场下粒子角动量的取向与电荷有关，带同种电荷的粒子组成的总角动量为0的复合粒子在磁场下是不稳定的，这可以定性解释s波超导体的迈斯纳效应[4]；但带异种电荷的粒子组成的总角动量为0的复合粒子却可以保持稳定，这是磁催化效应[24]能够成立的前提。自旋为1/2的带电费米子在磁场中的行为是很特别的，这主要体现在最低朗道能级上：能级本征值为0、简并度为$|qB|/4\pi$、带正（负）电粒子的自旋总是与磁场同（反）向[23]。由于能级本征值为0，这个态很容易被粒子占据，简并度线性依赖于磁场意味着可被占据的量子态随磁场增加很快。最低朗道能级中自旋的单值性往往是磁场相关的宏观量子反常效应产生的根源，比如手征磁效应是系统手征密度不为零时电荷沿磁场方向的输运现象[25]、手征分离效应是带电粒子密度不为零时手征荷沿磁场方向的输运现象[26]、磁涡旋效应则是磁场与转动角速度平行的系统中手征荷沿磁场方向的输运现象[27]。与一般导体中电流由电场引起不同，这里的电流和手征流等反常流是由磁场引起的而且是非耗散的[28−29]。值得一提的是，手征磁效应已在量子电动力学主导粒子间作用的凝聚态系统中被证实[30]，而在QCD主导粒子间作用的重离子碰撞中一直没被观察到[31−32]，主要原因是：单事件中背景流的强度远大于反常流、反常流的逐事件平均为0而要测量它的绝对值困难很大[33]。

这里要介绍的研究成果并不属于传统强场物理的范畴。强场物理是近几十年才发展起来的物理学分支[34]，主要的研究内容是如何产生可控的超强电磁场或者高强度激光场并对其进行应用，比如可控强磁场是核聚变装置托卡马克能成功运行的关键所在、控制和改变原子中电子的运动进而改善物质的性质、研究真空极化以及光-光碰撞实验等。一般而言，强场物理中的“强场”是指电场达到原子中电子束缚能的强度（$eE$~1 keV$^2$）或者磁场达到可控核聚变的量级（$B$~$10^7$ Gs），而这相对于要讨论的“极强”磁场（$B \geqslant 10^{18}$ Gs）仍然是很弱的。本文将分章节分别讨论QCD系统的$T$ - $B$、$E$ - $B$、$\mu$ - $B$和$\Omega$ - $B$相图，忽略详细的解析推导和数值计算，细节可参考文献[35]，而着重阐述相图特征以及相变发生的物理机制。希望读者通过阅读能够建立起极强磁场下QCD相图的直观图像，有兴趣的理论工作者能从这里获得一些灵感、进一步推进QCD相图的广泛深入研究。对于相对论重离子碰撞实验而言，极强磁场下的QCD相图可能是$T$ - $\mu_B$相图之后另一块要开拓的“未知疆土”，希望所呈现的丰富相图信息能为实验学家们设计和进行极强磁场实验提供一些理论支持和研究参考。

## 1 QCD系统中的连续对称性

1937年，朗道提出了表征物质有序程度的“序参量”的概念[19]，并把相变统一描述成系统序参量及相应“对称性”的改变。此后，对称性成为物理学发展中的一个重要概念，比如李政道和杨振宁先生于1956年提出的弱相互作用宇称不守恒实际上是指左手和右手粒子参与作用的不对称。1957年，巴丁(Bardeen)、库珀(Cooper)和施里弗(Schrieffer)为解释超导现象提出了著名的BCS(Bardeen-Cooper-Schrieffer)理论[4]，当时凝聚态物理的学者很快意识到电子配对破坏了原理论的规范不变性，这就是后来广为人知的“对称性自发破缺”。现在，在量子场论中，朗道关于相变中对称性的变化问题往往可通过系统的有效拉格朗日量(拉氏量)直接反映出来。1961年，日本物理学家南部阳一郎把“对称性自发破缺”的概念引入亚原子层次并成功解释了核子质量的起源问题[36]，这深刻影响了粒子物理学的发展，如希格斯机制以及以此为基础的电弱统一理论的提出[37]。然而，并不是所有的相变都伴随着对称性的改变。1971年，英国物理学家科斯特利茨(Kosterlitz)和美国物理学家索利斯(Thouless)首先提出了表征系统拓扑结构的拓扑序的概念[38]，拓扑序的改变不影响系统的对称性。因此，拓扑相变是朗道相变之外一种新的相变类型，目前是凝聚态十分前沿的研究课题，特别是拓扑绝缘体材料的研发以及它在量子编码和储存方面的应用[39]。

QCD系统有两类非常重要的相变：手征相变和(解)禁闭相变，它们都属于朗道类型的相变。前者对应于手征对称性的破缺或恢复、序参量是手征凝聚(或质量)[36]；后者则对应于色空间中心对称性的破缺或恢复、序参量是波利亚科夫(Polyakov)圈[40]。其实，波利亚科夫圈的期望值与胶子场的拓扑结构直接相关，只是中心对称性的变化决定了(解)禁闭相变是朗道类型的。为了清楚地解释这些对称性，有必要引入QCD系统的拉氏量，在外电磁场下它的形式如下：

$$\mathcal{L}=-\frac{\mathcal{F}^a_{\mu\nu}\mathcal{F}^{a\mu\nu}+F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{4}+\bar{\psi}\left[\gamma^\mu\left(i\partial_\mu-g\frac{T^a}{2}G^a_\mu+qA_\mu\right)-m_0\right]\psi \tag{1}$$

式中：$\psi$是具有三个味道、三个色自由度的夸克场；味道用$u,d,s$表示；色用$r,g,b$表示；$G^a_\mu$是胶子场；$A_\mu$是背景电磁场的矢量势，它们对应的场强张量定义为：

$$\mathcal{F}^a_{\mu\nu}=\partial_\mu G^a_\nu-\partial_\nu G^a_\mu+gf^{abc}G^b_\mu G^c_\nu$$
$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$$

式(1)中夸克场部分没有味道混合，所以没有特意标出味道空间及其相应的矩阵，但要明白电荷$q$和流质量$m_0$代表的都是味道空间对角矩阵、色空间单位矩阵。注意这里的上下指标：希腊字母代表时空指标、英文字母代表色空间指标；相应地，$T^a$是色空间的盖尔曼矩阵，$f^{abc}$是相应的结构常数。为方便起见，规定磁场是均匀的且方向沿$z$轴正方向，则$A_0=A_3=0$且场强张量只有两个非零，即$F_{21}=-F_{12}=B$。

接下来，从式(1)出发介绍QCD系统的一些重要对称性。首先，QCD作为一个规范场论，零温时其拉氏量具有$U_E(1)$阿贝尔电磁规范不变性以及$SU_C(3)$非阿贝尔色规范不变性。其次，在背景电磁场为0时，$u,d$两种轻夸克的流质量是很接近的，所以很容易看出拉氏量在轻夸克定义的同位旋空间具有$U_I(2)$对称性。与此同时，轻夸克质量很小，如果近似忽略它们的流质量，则拉氏量在手征变换$\psi\rightarrow e^{i\gamma_5(\alpha+\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\tau})}\psi$(其中$\boldsymbol{\tau}\equiv(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$是同位旋空间的泡利矩阵)下是不变的，具有$U_A(2)$手征对称性。真实情况下，$u,d$夸克的流质量并不严格相等或等于0，所以QCD的同位旋和手征对称性一般不是严格的；进一步考虑到$U_A(1)$手征反常[37]，QCD实际上只有近似的$SU_I(2)$和$SU_A(2)$对称性。当然，这里有个例外：同位旋空间的$I_3$对称性是严格的，即拉氏量在变换$\psi\rightarrow e^{i\theta\tau_3}\psi$下严格不变。在强背景磁场下，$u,d$夸克的简并性会因电荷不同而进一步被破坏，从而QCD拉氏量式(1)只剩下同位旋对角变换部分的对称性：严格的$I_3$同位旋对称性以及近似的$A_3$手征对称性(对应变换$\psi\rightarrow e^{i\gamma_5\theta\tau_3}\psi$)。

最后，$SU_C(3)$群中有一类特殊的子群，它与任意群元都对易，称为群的中心$Z_3$，显然拉氏量式(1)中纯胶子场部分在群的中心变换下是不变的。有限温时，为了满足胶子场的周期性边界条件(从可相差一个常量的意义上而言)，幺正幺模的中心变换只能取如下形式[40]：

$$z_k(x)=e^{i2\pi kx_4/(\beta N_c)}V(x)\boldsymbol{I}_{N_c}\quad(k=0,\cdots,N_c-1)$$

其中：$x_4\equiv it$是虚时，$\boldsymbol{I}_{N_c}$是色空间单位矩阵，$V(x)$满足$V(\beta)=V(0)$(这里略去无关的空间坐标)。于是，有变换关系$z_k(\beta)=e^{i2\pi k/N_c}z_k(0)$，则当$k\neq0$时夸克场在此变换下不满足反对易性，即：

$$z_k(\beta)\psi(\beta)=-e^{i2\pi k/N_c}z_k(0)\psi(0)\neq-z_k(0)\psi(0)$$

因此，只有在夸克质量无穷大从而可以忽略夸克自由度时，中心对称性才是QCD的一个严格对称

性；对真实的情形，中心对称性会被较小的夸克流质量明显破坏。这里讨论中心对称性的意义在于：即使是纯规范场理论，如果波利亚科夫圈的期望值不为0，它也是可以被破坏的，即波利亚科夫圈是它的序参量。波利亚科夫圈一般定义成：

$$L = \frac{1}{N_c} Tr\ P\exp\left[ig\int_0^\beta \mathrm{d}x_4\, G_4\left(x_4\right)\right]$$

$$G_4\left(x_4\right) = G_4^a\left(x_4\right)T^a/2$$

它是威尔森圈的一种特殊形式，而式(1)中的纯规范场部分则可用威尔森圈的实部完全表示成另一种等价形式。对胶子场的中心变换实际上等价于$G_4\left(x_4\right) \to G_4\left(x_4\right) - 2\pi k x_4/\left(\beta N_c\right)$，从而变换后的波利亚科夫圈为$L' = \mathrm{e}^{-i2\pi k g/N_c}L$：当$L$不为0时，不同的$k$给出不同的$L'$，取实部后可知拉氏量的期望值依赖于$k$，即它的中心对称性发生了自发破缺。

## 2　*T* - *B*相图与反磁催化效应

之所以从介绍温度-磁场（*T* - *B*）相图开始，有两方面的原因：1）温度是热力学系统最常见的宏观物理参量之一，大家对它的物理效应非常熟悉，很多相图都以温度作为其中一个维度；2）温度的引入不会给蒙特卡罗数值计算带来额外困难，因而第一性原理的格点QCD模拟几乎可以确切地给出*T* - *B*相图的一些真实特征，如同实验数据一般。但是，物理工作者们都很清楚：得到计算或观测数据并不是物理研究的终点，用可靠理论解释所得结果并作出新的预言以检验所持观点才是学科不断推陈出新、取得发展进步的动力。

格点QCD模拟所给出的*T* - *B*相图如图2所示[41]。为了方便起见，这里和下文的相图中磁场的大小一律用*eB*表示，且都采用自然单位制把单位转换成GeV²。图2(a)中的带状区域和数据点是严格的格点QCD计算得到的赝相边界，两条虚线由这些数据外推得到。这里之所以称为"赝"相边界是因为它们是连续过渡而不是有级次的相变，相变点只是形式地由序参量（轻夸克和奇异夸克手征凝聚、波利亚科夫圈）随温度变化最快的点定义。相变线的上下部分分别代表手征对称性恢复与破缺相或者解禁闭与禁闭相。由§1的讨论可知，当夸克的流质量有限时，QCD的拉格朗日量既没有严格的手征对称性也没有严格的中心对称性，这是对应的相变允许出现连续过渡的根本原因。从图2(b)可以读出的关键信息是：随磁场增大，赝临界温度不断下降，而且由三个不同序参量定义的相边界越来越趋于一致。另一方面，当磁场很大时，(解)禁闭相变是一级相变且临界温度随磁场变化很小，相图存在临界终止点。图2(b)的结论很大程度上依赖于所采用的各向异性纯规范场论近似，还是要谨慎对待这个结果，特别是数值上的。

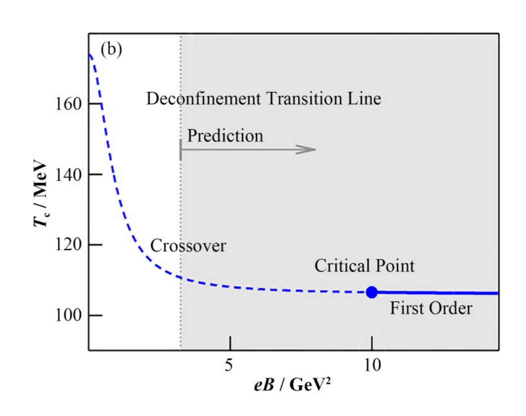



**图2**　(a) 严格的格点QCD的模拟结果，*eB* ≤ 1 GeV²区域的红色和蓝色带状相边界分别代表轻夸克(*u*,*d*夸克)和奇异夸克的手征相变线，*eB* = 3.25 GeV²处的三个点中红色和蓝色分别是轻夸克和奇异夸克手征相变点、绿色是(解)禁闭相变点(这里做了点小平移，其实三个点位置高度一致)，两条虚线是内推的结果；(b) 较小磁场下严格的格点QCD计算和较大磁场下各向异性纯规范场格点结果(灰色区域)共同给出的(解)禁闭相变线[41]。两图中，虚线代表连续过渡、实线代表一级相变

**Fig.2**　(a) Results of restricted lattice QCD simulations, When *eB* ≤ 1GeV², the red and blue bands stand for the chiral transitions of light (*u*,*d*) and strange quarks, respectively. At *eB* = 3.25 GeV², the red and blue points correspond to chiral transition of light (*u*,*d*) and strange quarks, respectively, and the green points corresponds to the (de)confinement transition. Here, the dashed and dotted lines are interpolated from the above data. (b) The combined results of the restricted lattice QCD simulations for a smaller magnetic field and the anisotropic pure lattice gauge simulations at a larger magnetic field (grey region)[41]. In these figures, the solid line stands for the first-order transition, while the rest of theline stands for crossover.

这两个*T* - *B*相图的特征符合预期吗？(解)禁闭相变的临界温度随磁场增大而减小还是比较符合预期的，因为跑动耦合常数一般会随磁场能量的增大而减小[37]，从而随着磁场增大解禁闭也更容易发生。但是，手征相变的临界温度随磁场增大而下降不好理解，这是因为零温时手征凝聚随磁场而增大，即所

谓的磁催化效应[24]，格点QCD计算证实了这一点[42]。手征凝聚变大意味着手征对称性被破坏得更厉害，则对称性恢复的临界温度也应更大才合理，因此，格点QCD得到的反常结果被称为“反磁催化”效应[42]。先简单地利用最低朗道能级近似定性地理解一下磁催化效应。首先，以轻夸克为例，它们的手征凝聚其实是标量介子$\sigma$的凝聚，用夸克场表示则有$\sigma \propto \bar{u}u + \bar{d}d$，其中夸克-反夸克的总自旋和总轨道角动量都是1而总角动量为0。在最低朗道能级近似下，虽然夸克和反夸克的自旋沿磁场方向的分量是相反，但它们的总自旋仍可以是1，只要自旋的合成方向与磁场垂直即可。同样地，它们的轨道角动量沿磁场方向的分量可以相反，而总轨道角动量仍为1且与总自旋反向，从而总角动量为0。如此一来，磁场并不会破坏$\sigma$介子的稳定性，而最低朗道能级简并度随磁场的增大意味着更多的夸克、反夸克态可参与配对，因而手征凝聚的期望值也变大。目前，反磁催化效应还没有理解得很清楚的，主要的解释有手征化学势[43–44]、介子激发[45]或者跑动耦合常数[46]的影响等。结合（解）禁闭相变的特征，跑动耦合常数的解释还是比较自然和自洽的，特别是三个相变点随磁场增大而趋同意味着它们有共同的根源：耦合常数的减小不利于正反夸克配对的形成，因而手征对称性有恢复的倾向。很多人在手征有效模型中做了有效耦合常数对磁场和温度的拟合使所得的手征凝聚结果与格点QCD一致，这样做会削弱研究工作的物理意义，它看起来更像是在做数据处理而不是解释反常。其实，只考虑耦合常数随磁场跑动已经可以定性解释反磁催化效应了[35]：虽然零温时手征凝聚仍然随磁场增大而增大的，但温度效应会放大跑动耦合常数减小对凝聚的破坏作用并最终导致赝临界温度随磁场增大而下降。

## 3　平行电磁场下的$\boldsymbol{E}$ - $\boldsymbol{B}$相图

我们知道电场和磁场是密不可分的，变化的电场会诱导出磁场，变化的磁场也会诱导出电场，从而形成不断向前传播的电磁波。然而，均匀的电场和磁场却可以独立存在，因而可以把它们作为两个独立的物理参量去研究QCD的$E$ - $B$相图。1951年，施温格发展了一种称为“固有时积分”的方法可以把自由粒子在电磁场下的完全传播子的解析形式求解出来[47]，这对研究均匀电磁场的量子效应十分有用。当然，这里要指出，施温格给出的电场下粒子的传播子并不完全正确，因为它并不对应相同的入射和出射态，正确的形式只需更正固有时积分的路径即可[48]。电场下，格点QCD的模拟是有困难的，这同样是由于“符号”问题：如果用矢量势的时间分量$A_0 = -Ez$描述均匀电场，会发现它其实相当于坐标依赖的化学势。即便如此，对两个味道的QCD，如果$u$, $d$夸克的电荷刚好相反，“符号”问题可以避免掉；这是因为$qA_0$相当于坐标依赖的同位旋化学势部分，夸克场积分后的行列式是实数。因此，格点计算可以对这类特殊情形进行研究以便为了解真实QCD系统在电场下的性质提供参考，特别是一些对电荷不太敏感的物理。日本的一个团队做了这样的工作并发现电场会破坏禁闭效应[49]，这是因为禁闭由线性吸引势引起，而$A_0$相当于线性排斥势——当电场大到一定程度就可以克服禁闭势解离复合粒子了。

平行电磁场是比较特殊的构型，最早人们研究发现局域的平行电磁场会导致手征量子反常的发生，从而破坏系统的$\mathrm{U_A}(1)$对称性[37]，全域的平行电磁场效应肯定更加宏观。从粒子物理层面来说，中性的$\pi^0$介子衰变成两个光子是手征量子反常在微观层次上的体现[37]；而高能核物理实验表明，如果两个重离子发生非常边缘的碰撞，这等效于两束高强度光子的碰撞[50]，包括$\pi^0$介子在内的中性赝标量介子可以通过衰变的反过程产生。如果把平行的电场和磁场分别看成两束高强度的虚光子，它们的碰撞是可以产生大量中性赝标量介子并形成玻色-爱因斯坦凝聚的。对考虑三味夸克的情形，这里的中性赝标量介子包括$\pi^0, \phi, \phi'$；由于它们包含不同电荷成分，而电磁场会使不同电荷粒子的能量发生劈裂，这三种介子会以混合的形式发生凝聚[51]。中性赝标量介子的凝聚并没有改变拉氏量的对称性，又由于均匀凝聚的拓扑结构是平庸的，所以中性赝标量介子凝聚的发生并不是真正的相变，它只是手征对称性破缺方向受平行电磁场的影响发生了转动而已[52]，如同夸克流质量会使手征对称性破缺倾向于$\sigma$方向一样。

先讨论两味的QCD系统并给出非模型依赖的结果。在电磁场能标较低时，手征微扰论是QCD很精确的近似；如果只考虑均匀的$\sigma, \pi^0$凝聚，手征微扰论在平均场近似下的拉氏量形式很简单[52]：

$$\mathcal{L}(\theta) = f_\pi^2 m_\pi^2 \cos\theta + \frac{N_c EB}{4\pi^2}\left(q_u^2 - q_d^2\right)\theta \qquad (2)$$

式中：$f_\pi$和$m_\pi$分别是$\pi$介子衰变常数和质量；$\theta$是手征相位，即$\langle\sigma\rangle = f_\pi\cos\theta$, $\langle\pi^0\rangle = f_\pi\sin\theta$。从而，系统的热力学势为$U(\theta) = -\mathcal{L}(\theta)$，若限制$\theta$在一个周期$(-\pi, \pi]$内，则由$U'(\theta) = 0, U''(\theta) > 0$可解出势能的极小值点为$\sin\theta = \frac{N_c EB}{4\pi^2 f_\pi^2 m_\pi^2}\left(q_u^2 - q_d^2\right)$，即$\langle\pi^0\rangle =$

$\frac{N_c EB}{4\pi^2 f_\pi m_\pi^2}\left(q_u^2-q_d^2\right)$。这结果没有模型参数，通过其他手征有效理论——线性 $\sigma$ 模型和Nambu—Jona-Lasinio（NJL）模型也能得到，因而是非模型依赖的。当然，这个极小值点存在的前提是电磁场不能大到使 $|N_c EB(q_u^2-q_d^2)|>4\pi^2 f_\pi^2 m_\pi^2$——一旦超过这个临界值，手征凝聚会进入相位不断改变的混沌状态[53]。从 $\langle\pi^0\rangle$ 的表达式可以看出：如果 $q_u=\pm q_d$，则 $\langle\pi^0\rangle$ 凝聚消失；对实际情形 $q_u=-2q_d$，一旦平行电磁场不为0就有 $\langle\pi^0\rangle$ 凝聚。

由于电场比较大时，格点QCD的模拟是有困难的，采用NJL模型比较粗略地给出两味QCD系统的 $E$ - $B$ 相图以供读者参考，见图3。在磁场较小时，系统随电场增大，从手征对称性破缺相（Chiral Symmetry Breaking，χSB）连续过渡到手征对称性恢复（Chiral Symmetry Restoration，χSR）相，这与纯电场下的研究结果是一致的。当磁场不太小时，系统随电场增大会进入相位混沌的状态，类似于低维系统的相位涨落避免了连续对称性的自发破缺，在这个混沌态中手征对称性通过相位的不断变化得到恢复。然而，在此恢复相中手征凝聚的模仍然很大，与二维的科斯特利茨-索利斯拓扑相变类似地，这个相中可能存在手征相位的正反涡旋配对结构[38]，用"χSRV"（Chiral Symmetry Restoration with Vortical pairing）表示。随着电场的进一步增大，手征凝聚的模不断减小，正反涡旋配对将解离，最终涡旋也消失，系统进入均匀的手征对称性恢复相。图3中，黑线所示的χSB-χSRV相变的临界电场随磁场增大而下降，这与手征微扰论给出的临界电磁场关系 $E\propto 1/B$ 是定性一致的。只是当电磁场比较大时，手征凝聚进而 $f_\pi$, $m_\pi$ 都会变化，而且一级相变的临界点并不对应 $\sin\theta=1$，所以该相变线并不是严格的反比例函数[51]。很明显，连续过渡的蓝线与黑线光滑连接，它的赝临界电场随磁场减小的特征看似与磁催化效应相违背，但其实是受到手征相位转动的影响。红线所示的χSRV-χSR相变是拓扑相变，由手征凝聚模的变化决定；它表现出轻微的振荡行为，即临界电场随磁场增大先减小后增大，这是由于除了磁催化效应外，磁场还会放大平行电场下施温格对生机制对手征凝聚的破坏作用[35]。$E$ - $B$ 相图中最重要的信息是存在临界终止点，它也是给定磁场下χSRV相是否存在的分界点。由于平行电磁场相图同时涉及朗道类型的相变和拓扑相变，对这样的系统进行深入研究是非常有意义的，特别是当非对心的重离子碰撞可以产生很强的平行电磁场分量[17]。

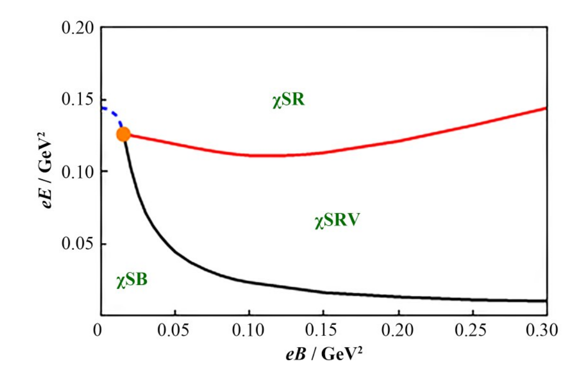



**图3** 平行电磁场下，两味NJL模型预言的QCD系统 $E$ - $B$ 相图。蓝线、黑线和红线分别表示手征对称性破缺相（χSB）、均匀手征对称性恢复相（χSR）和有相位涡旋的手征对称性恢复相（χSRV）之间的相变线。这里实线表示一级相变、虚线表示连续过渡、橙色点表示临界终止点

**Fig.3** QCD $E$ - $B$ phase diagram predicted by the two-flavor Nambu Jona-Lasinio (NJL) model with a parallel electromagnetic field. The blue, black, and red lines stand for the transitions between the phases of chiral symmetry breaking (χSB), homogeneous chiral symmetry restoration (χSR), and chiral symmetry restoration with vortices (χSRV). Here, the solid and dashed lines represent the first-order transition and crossover, respectively, while the orange point represents the critical end point.

## 4 各种化学势与 $\mu$ - $B$ 相图

在三味QCD系统中，基本费米子——夸克携带了许多守恒荷：重子数、电荷、同位旋以及奇异数。到目前为止，所有已知的反应过程中重子数和电荷都是严格守恒的；同位旋和奇异数代表的是味道，其中同位旋表征 $u$, $d$ 轻夸克重子数密度的差别、对应的化学势 $\mu_I$ 等于电化学势。考虑弱相互作用后味道并不守恒，只能用电化学势表征 $u$, $d$ 轻夸克重子数密度的差别，而且必须同时计入参与弱相互作用的轻子以保证总电荷严格守恒。此综述不考虑弱相互作用，则同位旋化学势已可大致反映电化学势的主要效应；重点讨论 $\mu_B$ - $B$ 和 $\mu_I$ - $B$ 两张相图，它们和图1中所示的三个极强磁场环境是息息相关的。

理论研究中，相图的绘制与考虑了哪些相直接相关，而在特定情形下哪些相是系统可能的基态很依赖于直觉和猜想。其实，前期零磁场下有限化学势的QCD相图研究结果足以启发 $\mu$ - $B$ 相图的讨论内容了。首先，在有限重子数化学势 $\mu_B$ 下，研究表明手征相变中非均匀的手征密度波相以及孤子调制相[48]是可能的，这借鉴了凝聚态物理中LOFF态的理论研究。其实，均匀相和各种形式的非均匀相对应系统不同的空间变换对称性（显然，均匀相对称性最高），因而他们之间的相变一般属于朗道类型的相变。其次，在很高重子数化学势下可认为解禁闭相变已经发生。与BCS理论中两个电子通过电磁相

互作用在费米面附近形成配对类似，解禁闭的QCD系统中两个带不同色荷的夸克同样可以通过强相互作用在费米面附近形成双夸克配对[55]。后者被称为色超导，在考虑了不同相互作用道以及味道自由度后，研究者发现$T$ - $\mu_B$相图在高密区域的结构十分丰富[55]。最后，手征微扰论最早预言[56]：当同位旋化学势大于带电$\pi$介子质量时，QCD系统会出现$\pi$介子超流现象，并且伴随着$I_3$严格对称性的自发破缺会产生一个零质量的南部-戈德斯通（Nambu-Goldstone）粒子。这些预言都很快得到了格点QCD模拟的验证[57]。实际上在统计力学中，对于相互作用较弱的玻色子系统，粒子化学势大于其质量就是零温下玻色-爱因斯坦凝聚发生的充分条件。此外，NJL模型的研究指出[58]：一旦重子数密度不为零，有限$\mu_I$下的QCD系统同样可能处于非均匀相。

### 4.1 $\mu_B$ - $B$相图

有限重子数密度-强磁场的环境存在于磁星中，也可在重离子碰撞中产生。但是，目前重离子碰撞所能产生的火球的重子数密度是很有限的，而且强磁场的产生往往伴随着高温，所以磁星是较理想的研究$\mu_B$ - $B$相图的物理实体。通常而言，磁星是表面磁场达到$10^{14}$~$10^{15}$ Gs的一类中子星（内部磁场可能更高），它的主要成分是中子、核心密度最高的部分可能还存在解禁闭的夸克和胶子。如果考虑禁闭的问题，$\mu_B$ - $B$相图是相当复杂的：在$\mu_B$较小时，系统的基本自由度是色中性的重子；在$\mu_B$较大时，系统的基本自由度是带色荷的夸克和胶子；这两个不同自由度的系统又会演化出不同的配对模式，比如核子-核子配对、双夸克凝聚等。这里只讨论以夸克和胶子为基本自由度的系统，并且由于格点QCD模拟的“符号”困难，仍以NJL模型为例粗略地给出两味QCD系统的$\mu_B$ - $B$相图。由于$\mu_B$和$B$对胶子没有直接效应，不能直接推导出波利亚科夫圈的热力学势对它们的依赖关系，因而也无法定量估计（解）禁闭相变，但会简单讨论它的影响。

为方便计算，忽略夸克流质量，由于流质量比较小且涉及的都是一级相变，相图定性上不会受这个手征极限近似的影响。$\mu_B$ - $B$相图如图4所示，这里比较了均匀的手征对称性破缺相（χSB）、手征密度波相（Chiral Density Wave，CDW）、孤子调制相以及均匀色超导相（Color Superconductor，2SC）。原则上，2SC也是电超导相，在磁场下会有迈斯纳效应；但是色-电磁规范场的重新排布会使得双夸克凝聚的有效电荷为零，从而避免了迈斯纳效应，2SC相要在这个意义上去理解。在重子数化学势$\mu_B$小于NJL模型能量截断的有效范围内，孤子调制相对于χSB以及CDW总不是最稳定的相[35]，所以相图中没有它存在的区域。在磁场比较小时，χSB相在$\mu_B$接近夸克真空动力学质量处通过一级相变进入色超导相。虽然只考虑了均匀双夸克凝聚，色磁不稳定性却总意味着非均匀色超导相才是稳定的，因而χSB到非均匀色超导相变的临界化学势可能更小些。当磁场较大时，χSB相随化学势增大更容易相变到CDW相，后者序参量的形式是$\langle\sigma\rangle = m\cos 2kz$, $\langle\pi^0\rangle = m\sin 2kz$[59]，其中：$m$, $k$由系统热力学势最小值确定。之所以CDW相会变得更稳定，可以从两方面去理解：首先，磁场破坏了系统的各向同性[59]；其次，磁场和重子数密度会共同导致手征分离效应[26]，那意味着夸克和反夸克都倾向于沿着磁场正方向运动，从而手征凝聚的总动量也倾向不为零。随着$\mu_B$的进一步增大，夸克与反夸克的能量差越来越大，最后手征对称性将会恢复；与之相反，双夸克配对却会因为费米面附近的强耦合效应变得越来越强。图4中CDW到2SC的相变线只是示意性的，不是真实的计算结果，但是能预期一条一级相变线的存在。从而，$\mu_B$ - $B$相图中存在一个三相点，它是三条一级相变线的共同交点，考虑了色磁不稳定性后，真实的三相点更可能是χSB、CDW以及非均匀色超导相共存的点，但相图的拓扑结构不会改变。§2中已经讲解了手征凝聚的磁催化效应，这里相边界的$\mu_B$随$B$先增大后下降的反常行为与温度的反磁催化效应不同，其实是de Hass-van Alphen振荡在相变中的体现[22]，但不排除进一步考虑耦合常数随磁场跑动后相边界的单调性会改变。最后，考虑到禁闭效应，色超导可能在更大的$\mu_B$处系统解禁闭后才能发生。这时，相图中将存在手征对称性恢复但仍禁闭的相，它被称为夸克素相（quarkyonic matter）[60]，它是夸克和重子共存的态：费米海内是近自由的夸克、费米面上是禁闭的重子。

### 4.2 $\mu_I$ - $B$相图

高同位旋密度-强磁场的环境存在于磁星或者早期宇宙中：前面已提到磁星是中子星，因而它的同位旋密度很大；宇宙早期如果存在大量$e$, $\mu$轻子，电中性条件必然要求带正电的$u$, $\bar{d}$夸克密度（从而同位旋密度）都较大[61]。然而，磁星中重子数化学势也很大，同位旋的相变效应会受到强烈抑制，考虑了电中性条件后，中子星的最核心部分不太可能形成$\pi$介子凝聚。宇宙早期，重子数密度是很小的，这时候同位旋效应更容易显现出来；虽然早期宇宙的温度很高，但电中性条件下的$\pi$超流还可能会发生[61-62]。

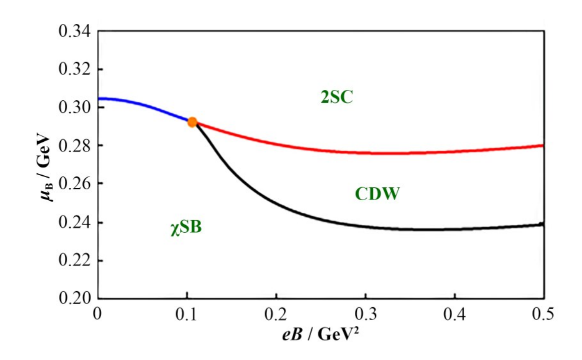



**图4**　手征极限下，两味NJL模型预言的QCD系统$\mu_B$ - $B$相图。蓝线、黑线和红线分别表示均匀的手征对称性破缺相（χSB）、手征密度波相（CDW）和均匀色超导相（2SC）之间的相变线。这里的实线表示一级相变、橙色的点表示三相点

**Fig.4**　QCD $\mu_B$ - $B$ phase diagram, in the chiral limit, predicted by the two-flavor Nambu Jona-Lasinio (NJL) model. The blue, black, and red lines represent the transitions between the phases of chiral symmetry breaking (χSB), chiral density wave (CDW), and homogeneous color superconductivity (2SC). Each of the transitions are first-order transitions (as represented by the solid lines). The orange point is the tricritical point in the phase diagram.

研究磁场下的π超流有很重要的一点需要注意：这里的"超流"只是对"同位旋"而言的，实际上π超流与色超导一样也是"带电超导体"，因而具有把磁场从超导体内部挤到表面的迈斯纳效应。由此，磁感应强度$B$不是π超流相变中连续变化的物理参量，相图中应该采用连续变化的外磁场强度$H$代替$B$[4]，就像一级相变中应该用连续变化的化学势而不是密度作为相图的坐标轴一样。为了与其他相图表示相统一，用$B = \mu_0 H$表示外磁场大小。虽然前面的相图中$B = \mu_0(H + M)$，但由于磁化强度$M$比$H$小很多，其实所有的相图都把$B$理解成外磁场大小。如§1所述，磁场下QCD的同位旋$SU_I(3)$对称性被破坏了，从而同位旋化学势下夸克场的行列式不再是实的，格点QCD模拟变得无能为力，所以仍以NJL模型为例粗略地给出两味QCD系统的$\mu_I$ - $B$相图。与$\mu_B$ - $B$相图类似，这里无法定量估计（解）禁闭相变，但会简单讨论它们对相图的影响。

很多迹象都表明磁场下的π超流更可能是第二类超导体[63]，他可具有磁涡旋结构且参与的都是二级相变。考虑了均匀的手征对称性破缺相（χSB）、有磁涡旋的π超流相（π Superfluid with Magnetic Vortices，πSFV）以及均匀的π超流相（Homogeneous π Superfluid，πSF）后，两味QCD系统的$\mu_I$ - $B$相图如图5所示。黑线是利用金斯堡-朗道展开的方法计算得到的从χSB相到π超流相的相变线[64]：由于金斯堡-朗道理论只适用于连续相变，这里磁场下的π超流相必然是具有磁涡旋结构的。随着$\mu_I$不断增大，π凝聚的模越来越大、磁涡旋的半径越来越小，最终磁场将从超导体内完全消失。这对应的是πSFV - πSF二级相变，用红虚线示意，注意它并非真实计算结果。很明显，零磁场处一定是$\mu_I$ - $B$相图的临界点：磁涡旋态的两条相边界在此相交从而它存在的参数空间减小到零。与有限$\mu_B$时的夸克素类似，如果πSFV -πSF相变发生后系统仍然处于禁闭状态，则$\mu_I$较大处的πSF相实际上很可能是夸克介子素（quarksonic matter）[65]，它是夸克和介子共存的相：费米海内是近自由的夸克和反夸克、费米面上是禁闭的π介子。但是，π介子是色中性的——与双夸克带色荷不同，（解）禁闭相变的发生一般不太会影响这里相变线的拓扑结构。

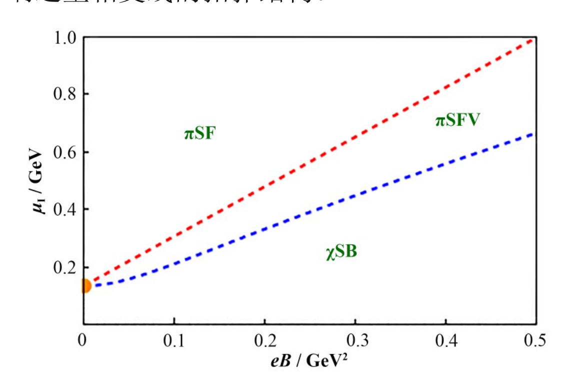



**图5**　两味NJL模型预言的QCD系统$\mu_I$ - $B$相图。黑线和红线分别表示均匀的手征对称性破缺相（χSB）、有磁涡旋的π超流相（πSFV）和均匀的π超流相（πSF）之间的相变线。虚线表示二级相变、橙色的点表示临界点

**Fig.5**　QCD $\mu_I$ - $B$ phase diagram predicted by the two-flavor Nambu Jona-Lasinio (NJL) model. The black and red lines represent the transitions between the phases of chiral symmetry breaking (χSB), π-superfluidity with magnetic vortices (πSFV), and homogeneous π-superfluidity (πSF). The second-order transitions are represented by the dashed lines. The orange point is the critical point in the phase diagram.

## 5　平行磁场和转动下的$\Omega$ - $B$相图

目前，所知具有平行磁场和转动角速度分量的QCD环境有两个：脉冲星以及非对心重离子碰撞。脉冲星的磁轴和转轴不是平行的[19]，否则无法观察到脉冲现象；但是它们的夹角一般比较小，因而与磁场平行的转动角速度成分占主导。迄今为止，2005年发现的PSRJ1748-2446ad是脉冲星中转速最快的，达到每秒716转，对应的角速度为$\Omega \approx 4.5 \times 10^3$ rad·s$^{-1}$。一般中子星半径大小是$10^4$ m量级，则PSRJ1748-2446ad表面速度为$v_s \approx 4.5 \times 10^7$ m·s$^{-1}$，快到超过光速的1/10了。然而，该角速度变换到自然单位制后的大小为$\Omega \approx 10^{-11}$ eV，它与QCD的能标$\Lambda_{QCD}$相差很大，从而不太可能影响QCD相变。非对心重离子碰撞中，磁场和整体转动的方向一般是平行的，即都垂直于碰撞平面。2017年，美国布鲁

克海文国家实验室的重离子碰撞实验RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider)通过金-金非对心碰撞产生了宇宙中转速最快的流体[66]，对应的角速度为$\Omega \sim 10^{22}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$。由因果律的限制，如此快转速的系统的半径不能超过10 fm量级，因而只能是微观系统，如重离子碰撞产生的火球。在自然单位制中，$\Omega \sim 0.01$ GeV、约为$\Lambda_{QCD}$的1/10，这足以影响QCD相变了，因此，这里要讨论的$\Omega$ - $B$相图可能跟重离子碰撞实验更相关。

在引言中提到真空没有转动，那$\Omega$ - $B$相图是否只能在较大化学势下(因而具有非零粒子数)讨论才有意义呢？答案是否定的，因为引言中也说明了$\Omega$本身就能引入化学势效应，只是该化学势依赖于角动量而已，即$\left(\vec{l}+\vec{s}\right)\cdot\vec{\Omega}$($\vec{l}$和$\vec{s}$分别是轨道和自旋角动量)。零温时，根据有限化学势的“银色马”性质[67]，如果在满足边界条件下$|\left(\vec{l}+\vec{s}\right)\cdot\vec{\Omega}|$小于粒子质量，则该转动没有任何效应，系统与零转动时的真空一样，所以要从这个意义上去理解零温时$\Omega$较小的情形。一旦温度不为零或化学势较大，系统中必然存在粒子，则角速度$\Omega$为零或非零显然是有区别的。当$|\left(\vec{l}+\vec{s}\right)\cdot\vec{\Omega}|$大于粒子质量时，系统中也必然存在粒子，它与化学势较大的小转动系统有什么区别呢？以重子和反重子为例，对零温的情形，当重子化学势大于重子质量时，系统只有重子而没有反重子，小转动的效应只是按角动量大小对这些重子进行重新排布而已。当重子化学势为零而$|\left(\vec{l}+\vec{s}\right)\cdot\vec{\Omega}|$较大时，系统中存在一样多的重子和反重子，且它们的角动量都倾向沿角速度正方向，可以说，转动带来的角动量极化避免了重子-反重子湮灭。

由于“符号”问题，格点QCD模拟转动效应一般也是困难的，仍以NJL模型为例根据已知的一些数据[62-63]粗略地给出两味QCD系统的$\Omega$ - $B$相图，如图6所示。

这里考虑三个相：均匀的手征对称性破缺相(χSB)、有磁涡旋的π超流相(πSFV)和有磁涡旋的ρ超导相(ρ Superconductor with Magnetic Vortices, ρSCV)，三条粗线都是根据已有计算结果外推猜想得到的。对转动系统，虽然相变线的具体位置很依赖于系统的大小，相图的拓扑结构一般不会受影响；当然，考虑更多的相是可能改变相图结构的，比如涡旋形式的手征凝聚[68]。2018年，一些学者通过对转动参考系下的克莱因-戈登方程的研究提出[69]：平行磁场和转动下的QCD系统可能存在π介子超流。这是因为正负π介子的轨道角动量在磁场下取向相

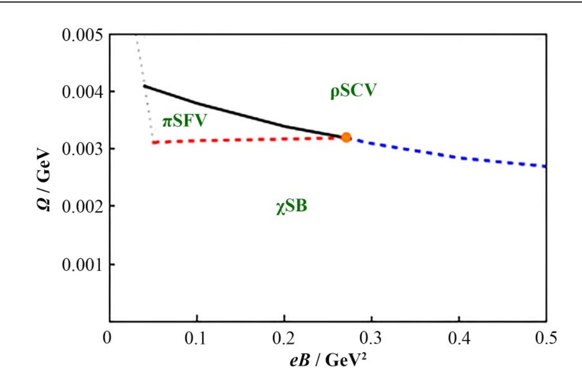



**图6** 两味NJL模型推测的QCD系统$\Omega$ - $B$相图。蓝线、黑线和红线分别表示均匀的手征对称性破缺相(χSB)、有磁涡旋的π超流相(πSFV)和有磁涡旋的ρ超导相(ρSDV)之间的相变线。实线表示一级相变、虚线表示二级相变、橙色的点表示临界点

**Fig.6** QCD $\Omega$ - $B$ phase diagram predicted by the two-flavor Nambu Jona-Lasinio (NJL) model. The blue, black, and red lines represent the transitions between the phases of chiral symmetry breaking (χSB), π-superfluidity with magnetic vortices (πSFV), and ρ-superconductivity with magnetic vortices (ρSCV). First-order and second-order transitions are represented by solid and dashed lines, respectively. The orange point is the critical point in the phase diagram

反，轨道角动量$l$与$\Omega$的耦合刚好可以导致类似于同位旋化学势的效应，见能量表达式$E(p_z, a, l) = [p_z^2 + m_\pi^2 + (2a+1)|eB|]^{1/2} \pm l\Omega$($a$由边界条件确定)[69]。然而，对带电π介子的内部自旋结构而言，磁场和转动都有破坏作用。以$\pi^+$介子为例，它由带正电的$u$夸克和反$d$夸克组成且总自旋为0，而磁场和转动的极化效应总倾向于使$u$夸克和反$d$夸克角动量与它们共同的方向相同。由此，只有平行磁场和转动的同位旋化学势效应强于自旋极化效应，π介子超流才会发生[70]。从自旋极化效应，很容易就意识到，由$u$夸克和反$d$夸克组成的总自旋为1的$\rho^+$介子似乎可以在平行磁场和转动下稳定存在，以介子为基本自由度的温伯格模型的讨论支持这样的观点[71]。考虑到真空中的π介子质量比ρ介子小很多，很合理地推测，在小磁场时，系统随$\Omega$的增大先发生χSB - πSFV二级相变后发生πSFV - ρSCV一级相变。随着磁场增大，ρ介子质量下降很快，两条相变线将相交于一临界点；当磁场大于临界点时，χSB相将通过二级相变直接进入ρSDV相。其实，在更早的时候，类似于$W^\pm$规范玻色子在纯磁场下会发生凝聚，高能核物理领域有ρ介子“真空超导”的提法[72]，简单的想法是：带电矢量介子的有效质量$m_\rho^B = \left(m_\rho^2 - |eB|\right)^{1/2}$随磁场增大而下降，最后变为零从而发生ρ介子凝聚。但是，格点QCD的计算并不支持这一设想[73-74]，NJL模型的研究也发现[75]：磁场下$u$, $d$夸克动力学质量的劈裂避免了ρ介子质量降为

零。这些研究很重要，它决定了χSB - ρSDV相变线在很大磁场时根本不与横坐标相交。此外，在磁场很小时，预期是不存在πSFV或ρSDV相的，这保持了与零磁场情形的连续性，所以在小磁场一端应该还有从χSB或χSR（$\Omega$较大手征对称性恢复的话[76]）相到πSFV或ρSDV相较倾斜的相变线，如灰色虚线所示。

## 6 结语

本文主要介绍了极强磁场下QCD系统的5张相图。在所有考虑的情形中，只有$T$ - $B$相图是可以通过第一性原理的格点QCD计算得到令人信服的数值结果的；其他情形中电场$E$、化学势$\mu$以及转动$\Omega$的效应都会导致“符号”问题，因而采用手征有效的两味NJL模型对$E$ - $B$、$\mu_B$ - $B$、$\mu_I$ - $B$和$\Omega$ - $B$相图进行简单定性的讨论。以下分条列出对5张相图主要特征的总结：

1）三味格点QCD模拟$T$ - $B$相图：一直到很大磁场处，系统的手征相变与（解）禁闭相变都是连续过渡且赝临界温度随磁场增大而下降，前者与磁催化效应的预期相反，耦合常数随磁场的跑动似乎是既自然又自洽的解释。

2）平行电磁场下的$E$ - $B$相图：一旦电磁场不为零，系统将连续过渡到有$\pi^0$凝聚的手征对称性破缺相；在小磁场时，手征对称性随电场增大而逐渐恢复；在磁场较大时，系统随电场增大先通过一级拓扑相变进入有涡旋的手征恢复相，接着又通过一级相变进入均匀的手征恢复相。

3）有限重子数化学势下的$\mu_B$ - $B$相图：小磁场时，系统随$\mu_B$增大直接从手征对称性破缺相进入色超导相；较大磁场时，系统随$\mu_B$增大先通过一级相变进入非均匀的手征密度波相，接着相变到色超导相；相图中存在三条一级相变线相交的三相点。

4）有限同位旋化学势下的$\mu_I$ - $B$相图：在给定有限磁场下，系统随$\mu_I$增大先通过二级相变进入有磁涡旋的π超流相，再通过二级相变进入均匀的π超流相；临界点在零磁场处。

5）平行磁场和转动下的$\Omega$ - $B$相图：小磁场时，系统随转动角速度$\Omega$增大发生连续的手征恢复相变；磁场稍大时，系统先通过二级相变进入有磁涡旋的π超流相，再通过一级相变进入有磁涡旋的ρ超导相；磁场很大时，系统直接通过二级相变进入有磁涡旋的ρ超导相。

**作者贡献声明** 曹高清：除了图1引用他人开源文章中的结果，文章所有内容都由作者独立完成。

## 参考文献


1 张三慧. 大学物理学-力学、热学[M]. 4版. 北京: 清华大学出版社, 2018: 49.
ZHANG Sanhui. College physics-mechanics, heat[M]. 4th Ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2018: 49.

2 严六明, 朱素华. 分子动力学模拟的理论与实践[M]. 北京: 科学出版社, 2013: 49 - 50.
YAN Liuming, ZHU Suhua. Theory and practice of molecular dynamics simulation[M]. Beijing: Science Press, 2013: 49 - 50.

3 Kincaid J M, Cohen E G D. Phase diagrams of liquid helium mixtures and metamagnets: experiment and mean field theory[J]. Physics Reports, 1975, **22**(2): 57 - 143. DOI: 10.1016/0370-1573(75)90005-8.

4 Fetter A L, Walecka J D. Quantum theory of many-particle systems[M]. San Francisco: McGraw-Hill, 1971.

5 Yu J, Le C C, Li Z W, *et al*. Coexistence of ferromagnetism, antiferromagnetism, and superconductivity in magnetically anisotropic (Eu, La) $FeAs_2$[J]. npj Quantum Materials, 2021, **6**: 63. DOI: 10.1038/s41535-021-00362-1.

6 Kapusta J I, Gale C. Finite-temperature field theory: principles and applications[M]. 2nd Ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

7 Liu C, Deng X G, Ma Y G. Density fluctuations in intermediate-energy heavy-ion collisions[J]. Nuclear Science and Techniques, 2022, **33**(5): 52. DOI: 10.1007/s41365-022-01040-y.

8 Yagi K, Hatsuda T, Miake Y. Quark-gluon plasma: From big bang to little bang[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.

9 Aoki Y, Endrődi G, Fodor Z, *et al*. The order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics[J]. Nature, 2006, **443**(7112): 675 - 678. DOI: 10.1038/nature05120.

10 Bhattacharya T, Buchoff M I, Christ N H, *et al*. QCD phase transition with chiral quarks and physical quark masses[J]. Physical Review Letters, 2014, **113**(8): 082001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.082001.

11 Collaboration S, Adamczyk L, Adkins J K, *et al*. Bulk properties of the medium produced in relativistic heavy-ion collisions from the beam energy scan program[J]. Physical Review C, 2017, **96**: 044904. DOI: 10.1103/PhysRevC.96.044904.

12 Luo X F, Xu N. Search for the QCD critical point with

fluctuations of conserved quantities in relativistic heavy-ion collisions at RHIC: an overview[J]. Nuclear Science and Techniques, 2017, **28**(8): 112. DOI: 10.1007/s41365-017-0257-0.

13 Collaboration T S. Higher-order cumulants and correlation functions of proton multiplicity distributions in $\sqrt{s_{NN}} = 3$ GeV Au+Au collisions at the STAR experiment[EB/OL]. 2022: arXiv: 2209.11940. https://arxiv.org/abs/2209.11940.

14 Wu S J, Shen C, Song H C. Dynamically exploring the QCD matter at finite temperatures and densities: a short review[J]. Chinese Physics Letters, 2021, **38**(8): 081201. DOI: 10.1088/0256-307X/38/8/081201.

15 Klevansky S P. The Nambu—Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics[J]. Reviews of Modern Physics, 1992, **64**(3): 649 – 708. DOI: 10.1103/revmodphys.64.649.

16 Hatsuda T, Kunihiro T. QCD phenomenology based on a chiral effective Lagrangian[J]. Physics Reports, 1994, **247** (5 – 6): 221 – 367. DOI: 10.1016/0370-1573(94)90022-1.

17 Deng W T, Huang X G. Event-by-event generation of electromagnetic fields in heavy-ion collisions[J]. Physical Review C - Nuclear Physics, 2012, **85**(4): 044907. DOI: 10.1103/PhysRevC.85.044907.

18 Olausen S A, Kaspi V M. The McGILL magnetar catalog [J]. The Astrophysical Journal Letters Supplement Series, 2014, **212**(1): 6. DOI: 10.1088/0067-0049/212/1/6.

19 Manchester R N, Hobbs G B, Teoh A, *et al*. The Australia telescope national facility pulsar catalogue[J]. The Astronomical Journal, 2005, **129**(4): 1993 – 2006. DOI: 10.1086/428488.

20 Grasso D, Rubinstein H R. Magnetic fields in the early Universe[J]. Physics Reports, 2001, **348**(3): 163 – 266. DOI: 10.1016/S0370-1573(00)00110-1.

21 汪志诚. 热力学•统计物理[M]. 6版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
WANG Zhicheng. Thermodynamics and statistical physics [M]. 6th Ed. Beijing: Higher Education Press, 2019.

22 朗道 L D, 栗弗席兹 E M. 统计物理学 I[M]. 北京: 高等教育出版社, 2015: 63.
Landau L D, Lifshitz E M. Statistical physics I[M]. Beijing: Higher Education Press, 2015: 63.

23 朗道 L D, 栗弗席兹 E M. 量子力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008: 413.
Landau L D, Lifshitz E M. Quantum mechanics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2008: 413.

24 Gusynin V P, Miransky V A, Shovkovy I A. Catalysis of dynamical flavor symmetry breaking by a magnetic field in 2+1 dimensions[J]. Physical Review Letters, 1994, **73** (26): 3499 – 3502. DOI: 10.1103/PhysRevLett.73.3499.

25 Kharzeev D E, McLerran L D, Warringa H J. The effects of topological charge change in heavy ion collisions: “Event by event P”[J]. Nuclear Physics A, 2008, **803**(3 – 4): 227 – 253. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2008.02.298.

26 Son D T, Zhitnitsky A R. Quantum anomalies in dense matter[J]. Physical Review D, 2004, **70**(7): 074018. DOI: 10.1103/physrevd.70.074018.

27 Hattori K, Yin Y. Charge redistribution from anomalous magnetovorticity coupling[J]. Physical Review Letters, 2016, **117**(15): 152002. DOI: 10.1103/PhysRevLett. 117. 152002.

28 Hattori K, Huang X G. Novel quantum phenomena induced by strong magnetic fields in heavy-ion collisions [J]. Nuclear Science and Techniques, 2017, **28**(2): 26. DOI: 10.1007/s41365-016-0178-3.

29 Liu Y C, Huang X G. Anomalous chiral transports and spin polarization in heavy-ion collisions[J]. Nuclear Science and Techniques, 2020, **31**(6): 56. DOI: 10.1007/s41365-020-00764-z.

30 Li Q, Kharzeev D E, Huang Y, *et al*. Observation of the chiral magnetic effect in $ZrTe_5$[J]. Nature Physics, 2016, **12**(6): 550 – 554. DOI: 10.1038/nphys3648.

31 Collaboration S. Charge separation measurements in p(d)+Au and Au+Au collisions; implications for the chiral magnetic effect[EB/OL]. 2020: arXiv: 2006.04251. https://arxiv.org/abs/2006.04251.

32 Adam J, Adamczyk L, Adams J R, *et al*. Methods for a blind analysis of isobar data collected by the STAR collaboration[J]. Nuclear Science and Techniques, 2021, **32**(5): 48. DOI: 10.1007/s41365-021-00878-y.

33 Wang F Q, Zhao J. Search for the chiral magnetic effect in heavy ion collisions[J]. Nuclear Science and Techniques, 2018, **29**(12): 179. DOI: 10.1007/s41365-018-0520-z.

34 张杰. 强场物理: 一门崭新的学科[J]. 物理, 1997, **26** (11): 643 – 649.
ZHANG Jie. A new horizon high field physics[J]. Physics, 1997, **26**(11): 643 – 649.

35 Cao G Q. Recent progresses on QCD phases in a strong magnetic field: views from Nambu: Jona-Lasinio model [J]. The European Physical Journal A, 2021, **57**: 264. DOI: 10.1140/epja/s10050-021-00570-0.

36 Nambu Y, Jona-Lasinio G. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. I[J]. Physical Review, 1961, **122**(1): 345 – 358. DOI: 10.1103/physrev.122.345.

37 Peskin M E, Schroeder D V. Introduction to quantum field theory[M]. Reading, Mass: Addison-Wesley Publish Corporation, 1995.

38 Kosterlitz J M, Thouless D J. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems[J]. Journal of Physics C: Solid State Physics, 1973, **6**(7): 1181 – 1203. DOI: 10.1088/0022-3719/6/7/010.

39 吕衍凤, 陈曦, 薛其坤. 拓扑绝缘体简介[J]. 物理与工程, 2012, **22**(1): 7 – 10, 18. DOI: 10.3969/j.issn.1009-7104.2012.01.002.

LYU Yanfeng, CHEN Xi, XUE Qikun. Introduction to topological insulator[J]. Physics and Engineering, 2012, **22**(1): 7 – 10, 18. DOI: 10.3969/j.issn.1009-7104.2012.01.002.

40 Fukushima K, Skokov V. Polyakov loop modeling for hot QCD[J]. Progress in Particle and Nuclear Physics, 2017, **96**: 154 – 199. DOI: 10.1016/j.ppnp.2017.05.002.

41 Endrődi G. Critical point in the QCD phase diagram for extremely strong background magnetic fields[J]. Journal of High Energy Physics, 2015, **2015**(7): 173. DOI: 10.1007/JHEP07(2015)173.

42 Bali G S, Bruckmann F, Endrődi G, *et al*. QCD quark condensate in external magnetic fields[J]. Physical Review D, 2012, **86**(7): 071502. DOI: 10.1103/physrevd.86.071502.

43 Chao J Y, Chu P C, Huang M. Inverse magnetic catalysis induced by sphalerons[J]. Physical Review D, 2013, **88**(5): 054009. DOI: 10.1103/physrevd.88.054009.

44 Cao G Q, He L Y, Zhuang P F. Collective modes and Kosterlitz-Thouless transition in a magnetic field in the planar Nambu: Jona-Lasino model[J]. Physical Review D, 2014, **90**: 056005. DOI: 10.1103/physrevd.90.056005.

45 Fukushima K, Hidaka Y. Magnetic catalysis versus magnetic inhibition[J]. Physical Review Letters, 2013, **110**(3): 031601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.031601.

46 Farias R L S, Gomes K P, Krein G I, *et al*. Importance of asymptotic freedom for the pseudocritical temperature in magnetized quark matter[J]. Physical Review C, 2014, **90**(2): 025203. DOI: 10.1103/physrevc.90.025203.

47 Schwinger J S. On gauge invariance and vacuum polarization[J]. Physical Review, 1951, **82**(5): 664 – 679. DOI: 10.1103/physrev.82.664.

48 Fradkin E S, Gitman D M, Shvartsman S M. Quantum electrodynamics: with unstable vacuum[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1991.

49 Yamamoto A. Overview of external electromagnetism and rotation in lattice QCD[J]. The European Physical Journal A, 2021, **57**(6): 211. DOI: 10.1140/epja/s10050-021-00530-8.

50 Adam J, Adamczyk L, Adams J R, *et al*. Measurement of $e^+e^-$ momentum and angular distributions from linearly polarized photon collisions[J]. Physical Review Letters, 2021, **127**(5): 052302. DOI: 10.1103/PhysRevLett.127.052302.

51 Cao G Q. Effects of a parallel electromagnetic field in the three-flavor Nambu--Jona-Lasinio model[J]. Physical Review D, 2020, **101**: 094027. DOI: 10.1103/PhysRevD.101.094027.

52 Cao G Q, Huang X G. Electromagnetic triangle anomaly and neutral pion condensation in QCD vacuum[J]. Physics Letters B, 2016, **757**: 1 – 5. DOI: 10.1016/j.physletb.2016.03.066.

53 Cao G Q. The electromagnetic field effects in in-out and in-in formalisms[J]. Physics Letters B, 2020, **806**: 135477. DOI: 10.1016/j.physletb.2020.135477.

54 Nickel D. Inhomogeneous phases in the Nambu-Jona-Lasinio and quark-meson model[J]. Physical Review D, 2009, **80**(7): 074025. DOI: 10.1103/physrevd.80.074025.

55 Alford M G, Schmitt A, Rajagopal K, *et al*. Color superconductivity in dense quark matter[J]. Reviews of Modern Physics, 2008, **80**(4): 1455 – 1515. DOI: 10.1103/revmodphys.80.1455.

56 Son D T, Stephanov M A. QCD at finite isospin density [J]. Physical Review Letters, 2001, **86**(4): 592 – 595. DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.592.

57 Kogut J B, Sinclair D K. Lattice QCD at finite isospin density at zero and finite temperature[J]. Physical Review D, 2002, **66**(3): 034505. DOI: 10.1103/physrevd.66.034505.

58 He L Y, Jin M, Zhuang P F. Pion condensation in baryonic matter: from Sarma phase to Larkin – Ovchinnikov – Fudde – Ferrell Phase[J]. Physical Review D, 2006, **74**: 036005. DOI: 10.1103/PhysRevD.74.036005.

59 Frolov I E, Zhukovsky V C, Klimenko K G. Chiral density waves in quark matter within the Nambu-Jona-Lasinio model in an external magnetic field[J]. Physical Review D, 2010, **82**(7): 076002. DOI: 10.1103/physrevd.82.076002.

60 McLerran L, Pisarski R D. Phases of dense quarks at large [J]. Nuclear Physics A, 2007, **796**(1 – 4): 83 – 100. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2007.08.013.

61 Vovchenko V, Brandt B B, Cuteri F, *et al*. Pion condensation in the early universe at nonvanishing lepton flavor asymmetry and its gravitational wave signatures[J]. Physical Review Letters, 2021, **126**(1): 012701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.126.012701.

62 Cao G Q, He L Y, Zhang P M. Reentrant pion superfluidity and cosmic trajectories within a PNJL model [J]. Physical Review D, 2021, **104**: 054007. DOI: 10.1103/PhysRevD.104.054007.

63 Cao G Q. The first-order QCD transition in a primordial magnetic field[EB/OL]. 2022: arXiv: 2210.09794. https://arxiv.org/abs/2210.09794.

64 Cao G Q, Zhuang P F. Effects of chiral imbalance and magnetic field on pion superfluidity and color superconductivity[J]. Physical Review D, 2015, **92**(10): 105030. DOI: 10.1103/PhysRevD.92.105030.

65 Cao G Q, He L Y, Huang X G. Quarksonic matter at high isospin density[J]. Chinese Physics C, 2017, **41**(5): 051001. DOI: 10.1088/1674-1137/41/5/051001.

66 Collaboration T S. Global Λ hyperon polarization in nuclear collisions: evidence for the most vortical fluid[J]. Nature, 2017, **548**(7665): 62 – 65. DOI: 10.1038/nature23004.

67 Cohen T D. Functional integrals for QCD at nonzero chemical potential and zero density[J]. Physical Review Letters, 2003, **91**(22): 222001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.222001.

68 Wang L X, Jiang Y, He L, *et al*. Chiral vortices and pseudoscalar condensation due to rotation[J]. Physical Review D, 2019, **100**: 114009. DOI: 10.1103/PhysRevD.100.114009.

69 Liu Y, Zahed I. Pion condensation by rotation in a magnetic field[J]. Physical Review Letters, 2018, **120**(3): 032001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.032001.

70 Cao G Q, He L Y. Rotation induced charged pion condensation in a strong magnetic field: a Nambu – Jona-Lasino model study[J]. Physical Review D, 2019, **100**(9): 094015. DOI: 10.1103/PhysRevD.100.094015.

71 Cao G Q. Charged rho superconductor in the presence of magnetic field and rotation[J]. The European Physical Journal A, 2021, **81**: 148. DOI: 10.1140/epjc/s10052-021-08900-8.

72 Chernodub M N. Spontaneous electromagnetic superconductivity of vacuum in a strong magnetic field: evidence from the Nambu-jona-lasinio model[J]. Physical Review Letters, 2011, **106**(14): 142003. DOI: 10.1103/physrevlett.106.142003.

73 Hidaka Y, Yamamoto A. Charged vector mesons in a strong magnetic field[J]. Physical Review D, 2013, **87**(9): 094502. DOI: 10.1103/physrevd.87.094502.

74 Ding H T, Li S T, Mukherjee S, *et al*. Meson masses in external magnetic fields with HISQ fermions[J]. PoS LATTICE, 2019, **2020**: 250. DOI: 10.22323/1.363.0250.

75 Cao G Q. Magnetic catalysis effect prevents vacuum superconductivity in strong magnetic fields[J]. Physical Review D, 2019, **100**(7): 074024. DOI: 10.1103/physrevd.100.074024.

76 Chen H L, Fukushima K, Huang X G, *et al*. Analogy between rotation and density for Dirac fermions in a magnetic field[J]. Physical Review D, 2016, **93**: 104052. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.104052.